

# Écoulements granulaires bidisperses sur plan incliné

Pierre ROGNON (1,2), Jean-Noël ROUX (1),  
Mohamed NAAIM (2) et François CHEVOIR (1)

(1) LMSGC, UMR LCPC-ENPC-CNRS, Institut Navier, 2, allée Kepler, 77 420  
Champs-sur-Marne, France

(2) CEMAGREF, 2 rue de la Papeterie, BP 76, 38402 Saint-Martin d'Hères, France

**RESUME :** Nous étudions par simulation numérique discrète l'écoulement dense d'un mélange bidisperse de disques sur un plan incliné rugueux. Nous nous restreignons aux écoulements stationnaires et uniformes, une fois qu'une ségrégation stable s'est installée dans la couche en écoulement. Le matériau peut être approximativement décomposé en trois couches : une couche de petits grains près du socle rugueux, une couche superficielle de gros grains et une couche intermédiaire constituée d'un mélange des deux types de grains. A partir de la mesure des profils de vitesse, de contraintes et de compacité, nous montrons que la rhéologie d'un tel mélange peut être décrite par une loi de frottement locale qui exprime une dépendance approximativement linéaire du coefficient de frottement effectif en fonction d'un nombre sans dimension, appelé nombre inertiel. Ce nombre généralise la grandeur introduite pour la rhéologie des systèmes quasi-monodisperses, à condition de prendre en compte le diamètre moyen des grains.

## I. Introduction

La compréhension des écoulements granulaires constitue un enjeu important tant en géophysique (glissement de terrain, propagation d'éboulements rocheux, d'écoulements pyroclastiques, d'avalanches de neige, mouvement de dunes [1, 2, 3, 4, 5]) que dans l'industrie (maintenance, mise en oeuvre de poudres, granulats en génie civil, génie chimique, agroalimentaire, pharmacie [6, 7, 8]). Pour prédire la propagation d'un écoulement à surface libre sur une topographie complexe ou la coulabilité dans un silo, un objectif majeur des études *rhéophysiques* est de déterminer les lois rhéologiques, et leur origine physique à l'échelle des grains et de leurs interactions [9, 10].

Notre exposé est limité à des assemblées de grains assez gros plongés dans un fluide interstitiel pas trop visqueux, de sorte que les grains n'interagissent que par contact direct [11]. Par ailleurs, nous nous intéressons aux écoulements denses, régime intermédiaire entre celui des déformations quasi-statiques de la mécanique des sols [12] et celui des écoulements rapides, dilués, susceptibles d'être décrits par la théorie cinétique des gaz denses [13, 14]. La compréhension de ces écoulements denses de grains secs a été un sujet de recherche actif au sein de la communauté scientifique durant la dernière décennie [15, 16, 17, 18]. Les expériences sur matériaux modèles et les simulations numériques discrètes dans des géométries simples ont constitué les deux voies d'étude pour identifier et mesurer les caractéristiques robustes et reproductibles et isoler les influences déterminantes. Ainsi, pour des grains rigides quasi-monodisperses de diamètre moyen  $d$  et masse volumique  $\rho_p$  soumis à une pression  $P$  et à un taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ , l'analyse dimensionnelle montre que l'état de cisaillement dépend d'un nombre sans dimension appelé *nombre inertiel*

$$I = \dot{\gamma} d \sqrt{\frac{\rho_p}{P}}. \quad (1)$$

Dans le régime dense, la loi de comportement s'exprime simplement par une dépendance linéaire du coefficient de frottement effectif  $\mu^* = S/P$  (où  $S$  est la contrainte de cisaillement) en fonction de  $I$ , ce que l'on appelle *loi de frottement* :

$$\mu^* \approx \phi + bI, \quad (2)$$

où l'angle de frottement interne  $\tan \phi \simeq \phi$  et  $b$  sont des paramètres liés aux propriétés micro-mécaniques des grains.

Cependant, dans les écoulements réels, la granulométrie est souvent assez étendue. C'est le cas dans les écoulements naturels et dans certains écoulements industriels, notamment en génie civil où l'on réalise des mélanges granulaires polydispersés (bétons) pour optimiser la compacité et à partir de là les performances mécaniques [19]. Cette polydispersité conduit à une ségrégation des plus gros grains à la surface de l'écoulement [20, 21, 22, 23, 5], mais les conséquences sur le comportement rhéologique du matériau demeurent mal comprises, sauf dans le cas d'écoulements dans le régime collisionnel [24, 25, 26].

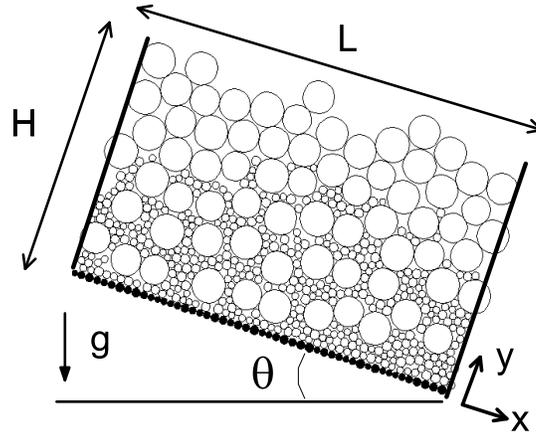
Afin de déterminer dans quelle mesure les lois d'écoulement mises en évidence pour des systèmes quasi-monodispersés restent valables dans le cas d'une granulométrie plus étendue, nous avons étudié par simulations numériques discrètes la situation simple d'un mélange granulaire bi-disperse de disques s'écoulant sur un plan incliné rugueux. Nous ne nous intéressons pas dans la suite au phénomène de ségrégation lui-même, mais aux propriétés de l'écoulement une fois qu'un écoulement stationnaire ségrégué est obtenu. Nous commençons par décrire le système simulé (Sec. II.), puis discutons les caractéristiques des écoulements permanents et uniformes (Sec. III.). Nous mesurons alors la loi de frottement globale de la couche en écoulement (Sec. IV.). Nous montrons enfin qu'il est possible de généraliser la loi de frottement locale pour le cas des mélanges (Sec. V.).

## II. Système simulé

Le système est bidimensionnel. Le matériau granulaire est une assemblée bi-disperse de 500 à 1000 disques de même densité  $\rho_p$  :  $n_1$  petits disques de diamètre moyen  $d_1$  et  $n_2$  grands disques de diamètre moyen  $d_2$  (avec une petite polydispersité ( $\pm 20\%$ ) autour de chaque diamètre moyen). Ce mélange est caractérisé par le rapport de taille  $D = d_2/d_1$  et par la proportion surfacique de gros grains  $S = (n_2 d_2^2)/(n_2 d_2^2 + n_1 d_1^2)$ . Nous avons étudié les mélanges suivants :  $D = \{2; 3; 4; 6; 8\}$  et  $S = \{1/4; 1/2; 3/4\}$ .

Les écoulements sont simulés par dynamique moléculaire [11]. Tous les grains ont les mêmes propriétés mécaniques : ce sont des grains visco-élastiques et frottants, non cohésifs, qui n'interagissent que par contact. Le modèle d'interaction est caractérisé par un coefficient de frottement fixé à 0.4, un coefficient de restitution normal fixé à 0.1 et une raideur normale suffisamment grande pour être dans limite des grains rigides (c'est à dire que la déformation relative des grains reste inférieure à  $10^{-3}$ ). Cette grande raideur correspond à un temps de collision binaire qui sera très petit par rapport au temps caractéristique lié à la gravité :  $\sqrt{d_1/g}$ . Les échelles de longueur et de temps utilisées sont  $d_1$  et  $\sqrt{d_1/g}$ , et l'échelle de vitesse  $\sqrt{gd_1}$ .

Une couche dense d'épaisseur  $H$  s'écoule sur un plan incliné rugueux incliné de  $\theta$  sous l'effet de la gravité  $g$  (Fig. 1). Des conditions aux limites périodiques sont appliquées selon la direction de l'écoulement  $x$  (pour simuler un écoulement infiniment long). La rugosité est composée de petits grains fixes, alignés et jointifs qui ont les mêmes propriétés mécaniques que les grains en écoulement. Nous avons étudié les situations suivantes :  $12^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$  et  $10 \leq H/d_1 \leq 50$ .



**Figure 1** – Ecoulement granulaire bidisperse sur un plan incliné rugueux ( $D = 4, S = 3/4, \theta = 17^\circ, H \simeq 30d_1$ ). Grains noirs : rugosité. Traits noirs : conditions aux limites périodiques.

### III. Ecoulements permanents et uniformes

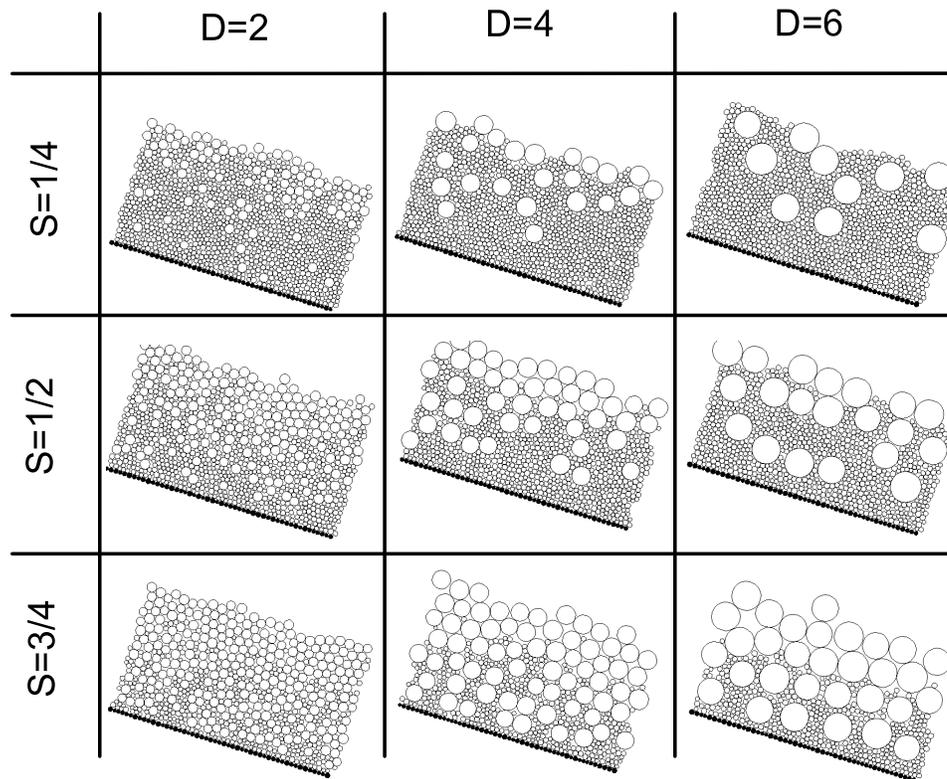
Dans une certaine gamme d'inclinaison et d'épaisseur, les mélanges bidisperses s'écoulent de manière permanente (qui ne dépend pas du temps) et uniforme (qui ne dépend pas de la direction de l'écoulement). Cette gamme d'inclinaison et d'épaisseur varie en fonction de la composition du mélange. La figure 2 montre les images de simulations qui correspondent à des écoulements permanents et uniformes pour différentes compositions de mélange. Dans de tels écoulements, les profils selon  $y$  des contraintes, de vitesse ou de fraction solide peuvent être moyennés dans le temps et dans la direction  $x$ .

Systématiquement, il apparaît que les composantes normales du tenseur des contraintes sont égales et que, en accord avec la conservation de la quantité de mouvement, la pression  $P$  et la contrainte de cisaillement  $S$  vérifient :

$$\begin{cases} P(y) = \rho_p \nu g \cos \theta (H - y), \\ S(y) = \rho_p \nu g \sin \theta (H - y). \end{cases} \quad (3)$$

#### III.1. Préparation

Le mode de préparation le plus souvent utilisé consiste à partir d'une configuration initiale où les grains sont placés au hasard et sans contact (compacité faible d'environ 0,5) puis à appliquer la gravité. Les grains se déposent sur le socle et commencent à s'écouler. Après un certain temps, l'écoulement peut atteindre un régime permanent caractérisé par des grandeurs telles que l'énergie cinétique totale, le tenseur des contraintes ou la fraction solide, indépendantes du temps. Comme le temps pour atteindre un éventuel régime permanent peut être long, une autre méthode plus rapide a été testée. Elle consiste à partir d'un écoulement permanent de petits grains et à placer un nombre voulu de gros grains dans l'écoulement (en éliminant les petits grains recouverts). L'une ou l'autre des méthodes, quelle que soit la répartition initiale



**Figure 2** – Ecoulements bidisperses permanents et uniformes ( $\theta = 17^\circ$ ,  $H \approx 30d_1$ ).

des gros grains (par exemple tous en bas, tous en haut, ou mélangé au petits) conduit après un temps plus ou moins long au même écoulement final.

### III.2. Ecoulements ségrégés

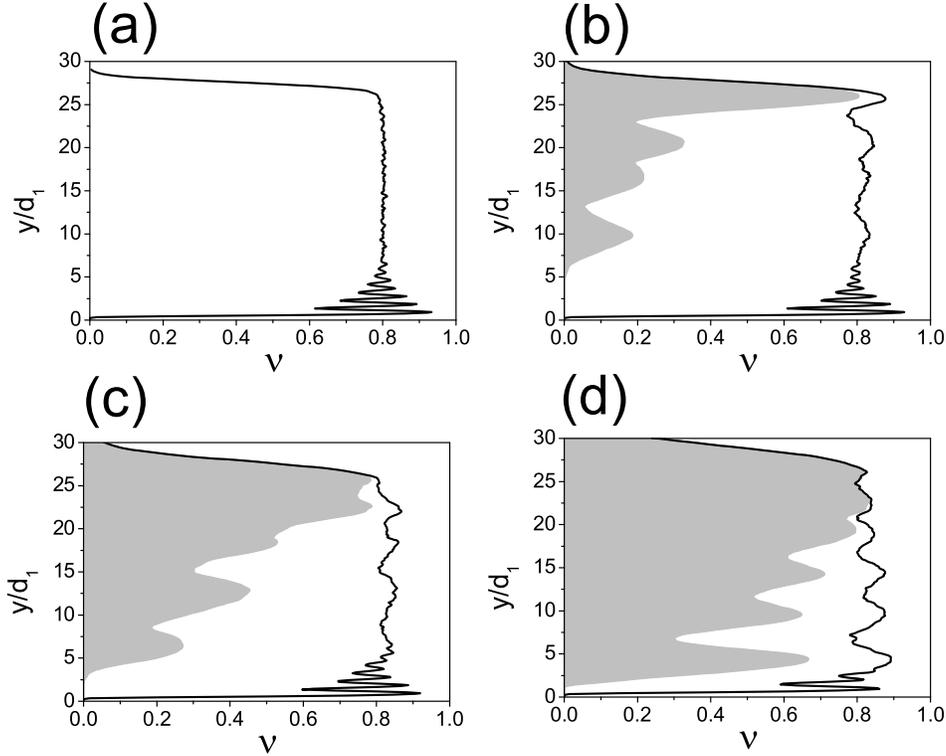
Pour chaque écoulement, la fraction solide  $\nu(y)$ , définie comme la surface occupée par les grains divisée par la surface totale, est approximativement constante :  $\nu(y) \approx 0,8$  (valeur qui varie légèrement selon la composition du mélange). La figure 3 (a) représente le profil de fraction solide pour un écoulement de petits grains uniquement. Il y apparaît une légère structuration proche de la paroi (couche d'environ  $5 d_1$ ). Les figures 3 (b,c,d) montrent le profil de fraction solide pour des mélanges bidisperse ( $D = 4, S = 1/4, 1/2, 3/4$ ). La structuration proche de la paroi est toujours présente et il s'y ajoute une légère structuration liée au gros grains.

Mais si la fraction solide totale est constante, les gros grains se trouvent préférentiellement en haut de l'écoulement. Cet état ségrégé, stable dans le temps et indépendant des conditions initiales, est visible sur les images de la figure 2 ainsi que sur les profils de fraction solide partielle de la figure 3 (surface occupée par les gros grains divisée par la surface totale). Les écoulements bidisperses se structurent en trois couches :

- une couche de petits grains au fond,
- une couche de gros grains à la surface,

– une couche mixte au centre.

Si la proportion de gros grains est faible ( $S = 1/4$ ) la couche supérieure de gros grains est peu épaisse (Fig. 3 (b)). Si la proportion de gros grains augmente ( $S = 1/2$ ), la couche supérieure s'épaissit et la couche de petits grains diminue. Si la proportion de gros grains augmente encore ( $S = 3/4$ ), ils occupent toute l'épaisseur de l'écoulement et la couche basale de petits grains disparaît (Fig. 3 (d)).



**Figure 3** – Profil de fraction solide ( $D = 4$ ,  $\theta = 17^\circ$ ,  $H \approx 30d_1$ ) : fraction solide totale  $\nu(y)$  (—), fraction solide partielle de gros grains  $\nu_2(y)$  (surfaces grise). (a)  $S = 0$ , (b)  $S = 1/4$ , (c)  $S = 1/2$ , (d)  $S = 3/4$

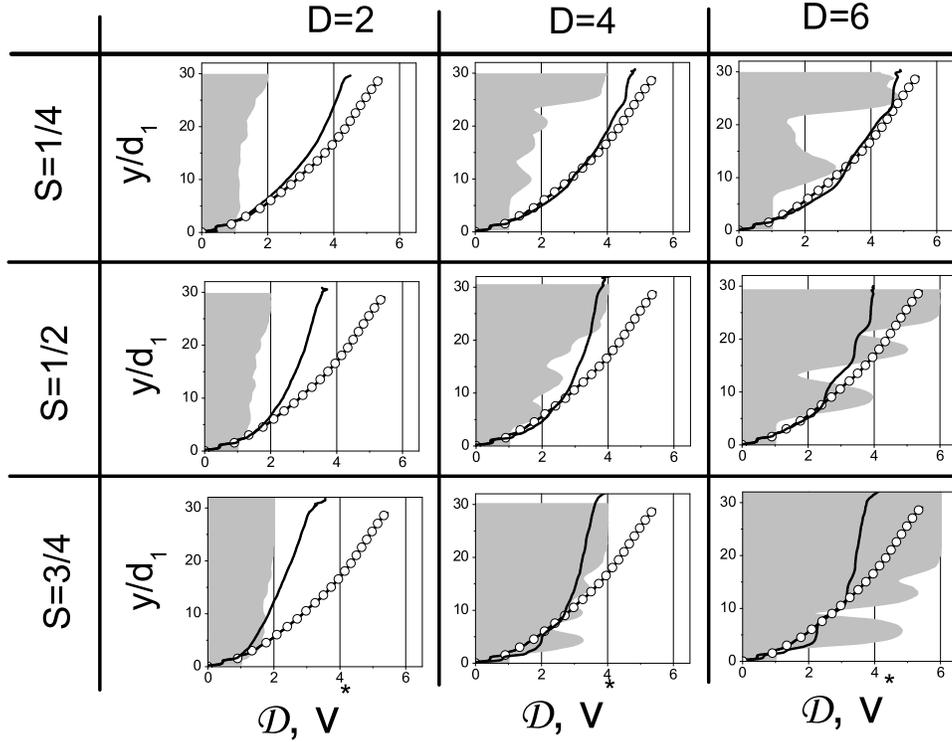
A partir des compacités partielles  $\nu_1$  et  $\nu_2$  des petits et gros grains ( $\nu = \nu_1 + \nu_2$ ), nous définissons un nombre sans dimension  $\mathcal{D}$  qui exprime le diamètre moyen des grains :

$$\mathcal{D} = \frac{\nu_1 + \nu_2 D}{\nu}, \quad (4)$$

dont nous traçons le profil sur la Fig. 4 pour différents mélanges.

### III.3. Profils de vitesse

La figure 4 montre aussi les profils de vitesse adimensionnés  $v^* = v_x / \sqrt{gd_1}$  pour différents mélanges. Pour l'écoulement monodisperse, le profil de vitesse est de type Bagnold (voir Eqn. (5)) [18]. Pour un écoulement bidisperse, le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  diminue systématiquement dans la couche supérieure de l'écoulement. La couche concernée est d'autant plus épaisse



**Figure 4** – Profils de vitesse adimensionné ( $\theta = 17^\circ, H \approx 30d_1$ ) : mélange bidisperse (—) et quasi-monodisperse ( $\square$ ) ; Profils de diamètre moyen adimensionné (gris).

que les gros grains sont nombreux, et  $\dot{\gamma}$  diminue d'autant plus que les gros grains sont gros. Si les gros grains sont assez nombreux ( $S \gtrsim 3/4$ ) et assez gros ( $D \gtrsim 3$ ), le cisaillement augmente fortement près de la paroi.

### III.4. Modèle bi-couche

L'observation des écoulements bidisperses met en évidence d'une part la ségrégation des gros grains en surface et d'autre part la modification du profil de vitesse. Il est tentant de relier ces deux phénomènes. Pour ce faire, une approche consiste à intégrer la loi de comportement de grains monodisperses dans la géométrie du plan incliné en considérant un modèle *bicouche* où les grains sont supposés parfaitement ségrégés (pas de couche mixte), puis à comparer les prédictions de ce modèle avec les mesures.

Pour une couche de grains monodisperses d'épaisseur  $H$  en écoulement permanent et uniforme sur un plan incliné de  $\theta$ , le coefficient de frottement effectif est directement relié à la pente :  $\mu^* = \tan \theta \simeq \theta$ . Les Eqs. (1), (2) et (3) conduisent au profil de taux de cisaillement suivant ( $\cos \theta \simeq 1$ ) :

$$\dot{\gamma}(y) \simeq \frac{\sqrt{\nu g}(\theta - \phi)}{bd} \sqrt{H - y}. \quad (5)$$

De cette relation ressort la dépendance du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  avec le diamètre  $d$  des grains :  $\dot{\gamma} \propto 1/d$ . Le rapport  $\Gamma$  des taux de cisaillement entre une couche de gros grains ( $\dot{\gamma}_2$ ) et une

couche de petits grains ( $\dot{\gamma}_1$ ) s'écrit donc :

$$\Gamma = \frac{\dot{\gamma}_2}{\dot{\gamma}_1} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{D}. \quad (6)$$

En considérant un modèle où la ségrégation des gros grains vers le haut est parfaite, l'écoulement bidisperse se divise en deux couches :

- une couche près de la paroi d'épaisseur  $(1 - S)H$  composée uniquement de petits grains,
- une couche supérieure d'épaisseur  $SH$  composée uniquement de gros grains.

Dans ce modèle bicouche, le rapport  $\Gamma$  est égal à 1 dans la couche de petits grains, et à  $1/D$  dans la couche de gros grains. La figure 5 compare ce modèle avec les mesures réalisées pour différents mélanges.

Pour une faible proportion de gros grains ( $S = 1/4$ ), le modèle décrit bien la couche basale ( $y \lesssim 6d_1$ ) et la couche supérieure (gros grains) mais cette dernière est très fine ( $y \gtrsim 0.75H$ ). La couche mixte centrale est très large et n'est pas bien représentée par le modèle, ce qui souligne l'importance de la rhéologie particulière d'un mélange de petits et de gros grains.

En augmentant la proportion de gros grains ( $S = 1/2$ ), le modèle décrit correctement les deux couches composées d'un seul type de grains, mais l'épaisseur de la couche de petits grains diminue ( $y \lesssim 3d_1$ ) alors que la couche supérieure augmente ( $y \gtrsim 0.5H$ ). La couche mixte centrale n'est toujours pas bien représentée.

En augmentant encore la proportion de gros grains ( $S = 3/4$ ), la couche supérieure est bien représentée et s'épaissit ( $y \lesssim 0.25H$ ). Par contre, la couche de petits grains n'existe plus : les gros grains occupent toute l'épaisseur de l'écoulement, y compris les zones proche de la rugosité. Pour des gros grains assez gros ( $D \gtrsim 4$ ), le taux de cisaillement augmente fortement proche de la rugosité. Elle peut être interprétée comme une conséquence d'un piégeage moins efficace des gros grains par une rugosité faite de petits grains [27].

#### IV. Loi de frottement macroscopique

Les méthodes de type Saint-Venant [28, 29, 30, 31, 32, 33] couramment utilisée pour simuler des écoulements à l'échelle 1 dans des géométries complexes nécessitent une donnée cruciale : l'expression du coefficient de frottement  $\mu_p^*$  entre l'écoulement et la paroi, défini comme le rapport des contraintes tangentielle  $S_p$  et normale  $P_p$  à la paroi.

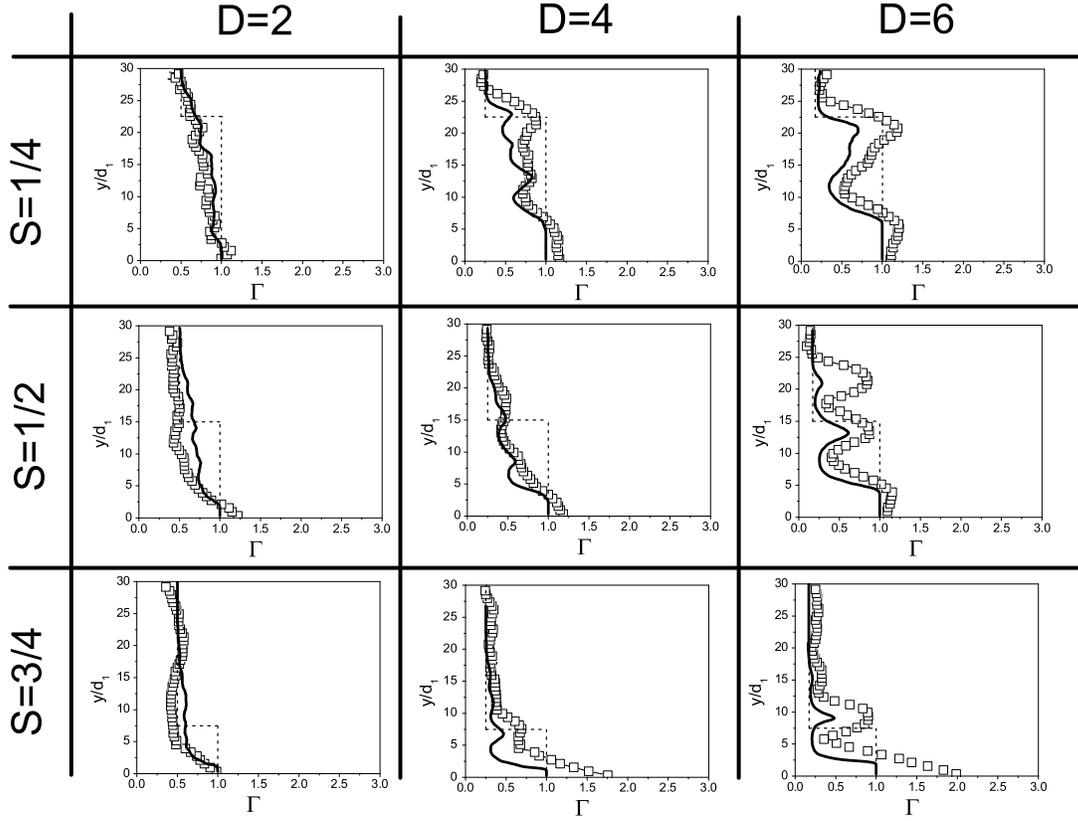
Pour des grains monodisperses (diamètre  $d$ , masse volumique  $\rho_p$ ) en écoulement sur un plan incliné rugueux, il a été montré que cette loi de frottement dépend à la fois de l'épaisseur  $H$  et d'une vitesse caractéristique de l'écoulement (vitesse moyenne ou vitesse à la surface  $v_x(H)$ ) [34, 35, 36]. Cette loi s'exprime de façon unique pour différentes épaisseurs :

$$\mu_p^* \simeq \phi + BI_g, \quad (7)$$

où  $\phi$  est l'angle de frottement interne, et  $B$  dépendent du couple matériau-rugosité considéré. Le nombre sans dimension  $I_g$ , appelé nombre inertiel global, s'écrit :

$$I_g = \frac{v_x(H)}{H} d \sqrt{\frac{\rho_p}{P(0)}}. \quad (8)$$

Il est équivalent au paramètre  $Fr/(H/d)$  introduit par [37] où  $Fr = v_x(H)/\sqrt{gH}$  est le nombre de Froude. La question qui se pose est de savoir si une telle loi existe pour des écoulement bidisperse et si oui, comment elle est influencée par la composition du mélange.



**Figure 5** – Comparaison des taux de cisaillement ( $\theta = 17^\circ, H \approx 30d_1, D = 4$ ) : mesures (—), modèle bi-couche (---).

#### IV.1. Mesure de la loi de frottement

Pour chaque mélange, un écoulement permanent est généré. Une fois établi, la pente  $\theta$  est modifiée assez lentement pour que l'écoulement puisse être considéré comme permanent à chaque pas de temps. Les variations de la pente  $\theta$  se font dans une gamme où l'écoulement est permanent :  $\phi < \theta < \theta_{max}$  où  $\phi$  est la pente en dessous de laquelle l'écoulement s'arrête, et  $\theta_{max}$  la pente au-dessus de laquelle l'écoulement est accéléré. La mesure de l'épaisseur  $H$  et la vitesse à la surface  $v_x(H)$  en fonction de  $\theta \simeq \mu_p^*$  donne accès à la loi de frottement du mélange. La figure 6 représente ces courbes pour différentes épaisseurs ( $H/d_1 \approx 10, 20, 30$ ) et différents mélanges. Il apparaît que pour un mélange donné, les courbes se regroupent dès que l'épaisseur est suffisamment grande ( $H/d_1 \geq 10$ ). La loi de frottement d'un mélange bidisperse s'exprime donc d'une façon similaire à celle d'un écoulement monodisperse (Eqn. 6) :

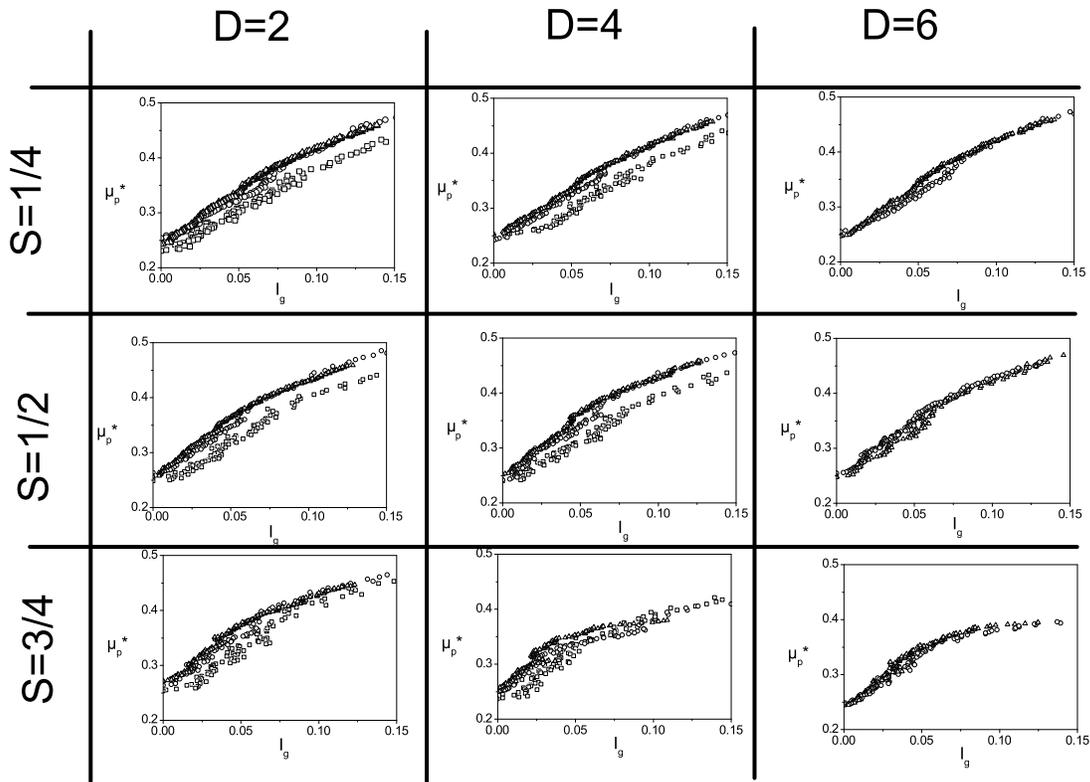
$$\mu_p^*(S, D) \simeq \phi(S, D) + BI_g, \quad (9)$$

où

$$I_g = \frac{v_x(H)}{H} d_1 \sqrt{\frac{\rho_p}{P(0)}}. \quad (10)$$

Les mesures effectuées montrent que les paramètres de mélange ne modifient pas la pente  $B$ , mais leur effet sur l'angle d'arrêt  $\phi$  est bien visible sur la figure 7. Pour des gros grains assez petits ( $D \lesssim 3$ ), plus la proportion de gros grains augmente, plus le frottement augmente. Pour des gros grains plus gros ( $D \gtrsim 3$ ), le frottement augmente aussi lorsque la proportion passe de 1/4 à 1/2, mais diminue lorsqu'elle passe de 1/2 à 3/4. Il y apparaît de nouveau les deux effets antagonistes :

- l'augmentation du frottement lorsque les gros grains n'occupent que la couche supérieure de l'écoulement (diminution du taux de cisaillement),
- la diminution du frottement lorsque les gros grains interagissent avec la paroi et qu'ils sont assez gros pour favoriser le glissement. Dans ce cas, plus les gros grains sont gros, plus le glissement est favorisé.



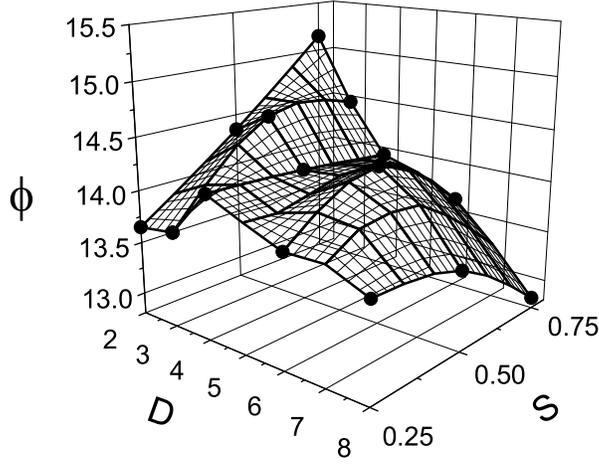
**Figure 6** – Loi de frottement macroscopique pour différents mélanges ( $H/d_1 = 10$  ( $\square$ ),  $20$  ( $\triangle$ ),  $30$  ( $\circ$ )).

## IV.2. Discussion

Le modèle bi-couche prédit une loi de frottement avec la même dépendance linéaire avec le nombre inertiel global :

$$\mu^* \simeq \phi + B(S, D)I_g, \quad (11)$$

avec une forte dépendance de la pente  $B(S, D)$  en fonction des paramètres de mélange :



**Figure 7** – Angle de frottement interne  $\phi$  en fonction du mélange.

$$B(S, D) = \frac{B}{(1 - S)^{3/2} + S^{3/2}/D}, \quad (12)$$

mais sans influence sur l'angle de frottement interne  $\phi$ . Ceci est en contradiction avec les mesures qui montrent une influence de  $S$  et  $D$  sur  $\phi$ , mais pas sur  $B$ . La conclusion est que la rhéologie particulière de la couche mixte et plus encore l'interaction entre la couche mixte et la paroi [27], non décrits par le modèle bi-couche, ont un rôle majeur sur la rhéologie globale d'un écoulement bidisperse sur plan incliné.

## V. Loi de frottement locale

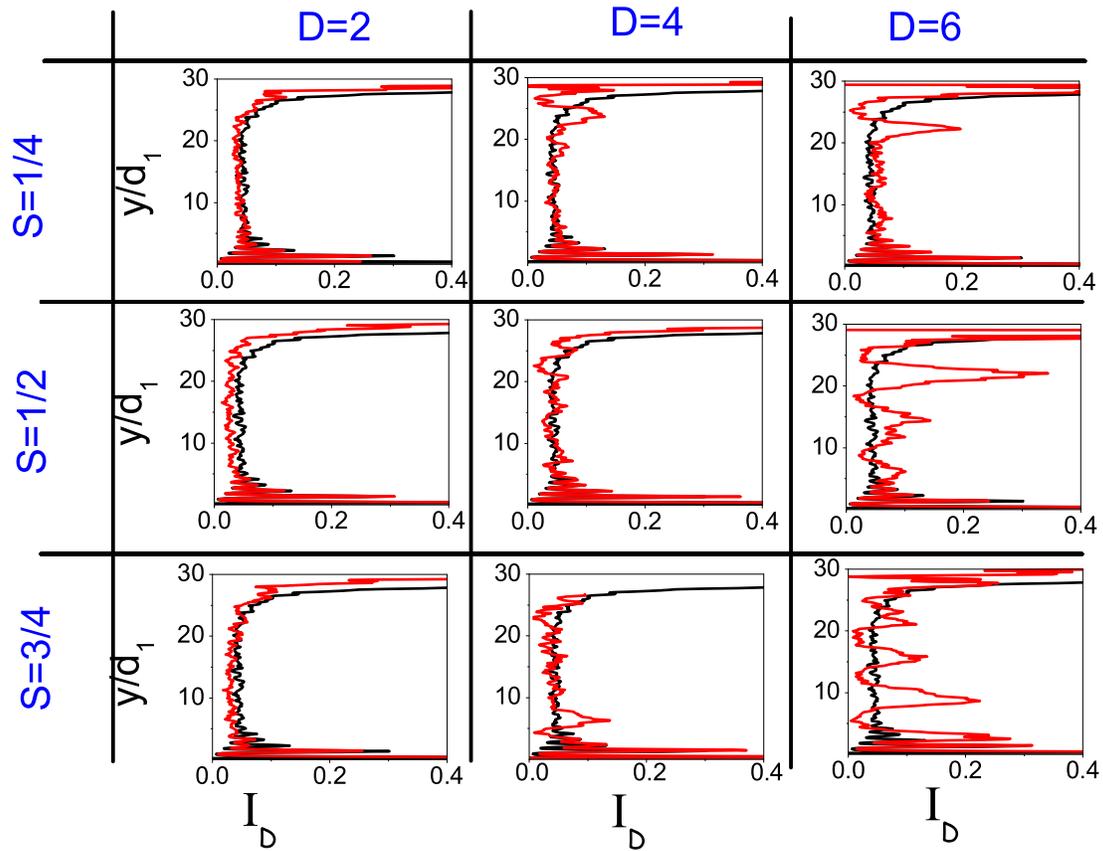
Nous cherchons maintenant à analyser la loi de frottement locale, y compris dans la couche de mélange. Pour cela, nous faisons l'hypothèse que la grandeur essentielle qui varie au sein du mélange est le diamètre moyen des grains  $\mathcal{D}d_1$ . Nous définissons alors un nombre inertiel généralisé  $I_{\mathcal{D}}$  à l'aide de ce diamètre moyen des grains :

$$I_{\mathcal{D}} = \dot{\gamma} \mathcal{D} d_1 \sqrt{\frac{\rho_p}{P}}. \quad (13)$$

dont nous traçons le profil sur la Fig. 8 pour divers mélanges. Nous constatons qu'en dehors des fortes oscillations pour les systèmes constitués d'un petit nombre de couches de gros grains,  $I_{\mathcal{D}}$  est à peu près constant dans l'épaisseur de la couche, et voisin de la valeur pour un système monodisperse.

Revenant alors au tracé de la loi de frottement, c'est à dire la relation entre l'inclinaison et le nombre inertiel généralisé, nous voyons sur la Fig. 9 qu'il apparaît assez clairement une loi de frottement locale pour ces mélanges, en bon accord quantitatif avec les mélanges monodisperses tant que la proportion de gros grains et le rapport de taille n'est pas trop grand :

$$\mu^* \simeq \phi + b I_{\mathcal{D}}. \quad (14)$$



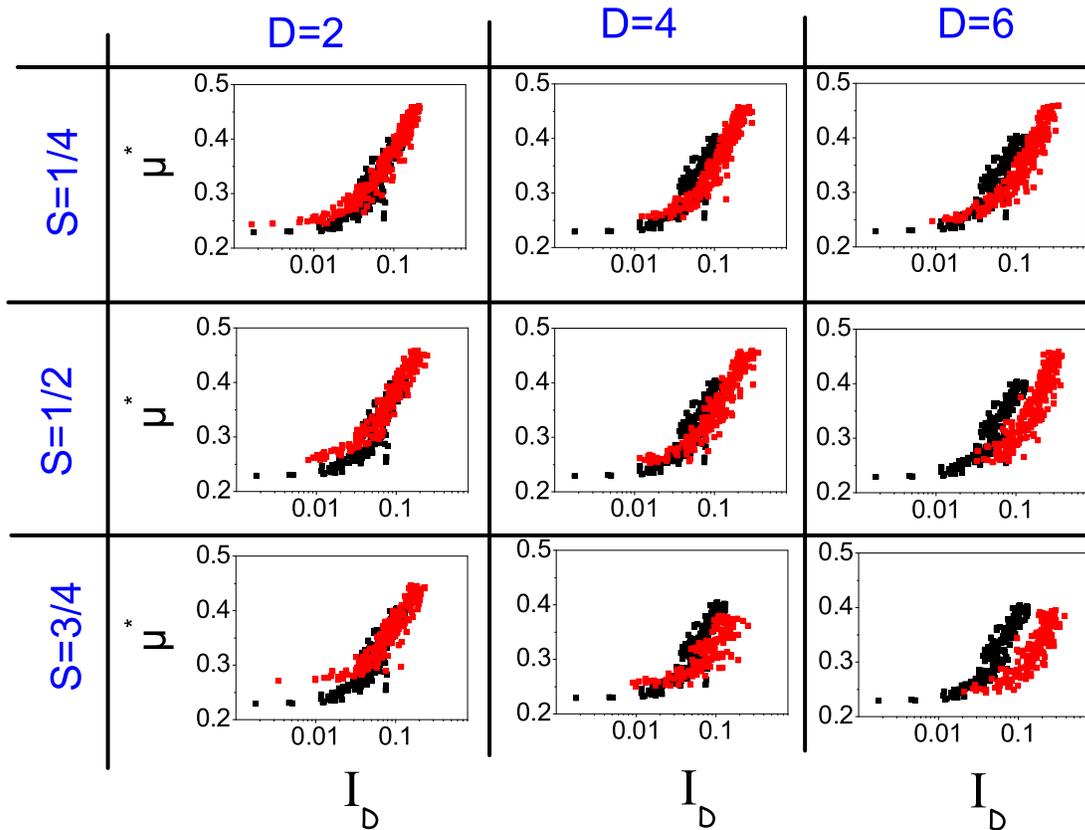
**Figure 8** – Profil du nombre inertiel généralisé  $I_D$  pour divers mélanges (en rouge), en comparaison d’un système quasi-monodisperse (en noir).

L’accord reste qualitativement bon pour les autres mélanges mais les paramètres  $\phi$  et  $b$  sont affectés.

## VI. Conclusion

Les simulations numériques discrètes d’écoulements bidisperses sur plan incliné rugueux ont mis en évidence une phénoménologie assez riche. Le premier point est que le mélange se ségrège et forme trois couches : une couche de petits grains en bas, une couche de gros grains en haut et une couche mixte au centre. L’intégration de la rhéologie locale de grains monodisperse dans un modèle bicouche ou la ségrégation est totale (petits en bas et gros en haut) permet de comprendre en quoi la présence des gros grains diminue le cisaillement dans la couche supérieure. Par contre, ce modèle simple ne représente ni la rhéologie particulière de la zone mixte, ni l’augmentation du cisaillement près de la paroi interprété comme une conséquence d’un piégeage moins efficace des gros grains par la rugosité.

Par ailleurs, les mesures montrent l’existence d’une loi de frottement macroscopique qui décrit les écoulements bidisperses sur plan incliné et souligne l’importance de la rhéologie particulière de la zone mixte, et à plus forte raison celle de l’apparition d’un glissement à la



**Figure 9** – Loi de frottement locale  $\mu^*(I_D)$  pour divers mélanges (en rouge), en comparaison d’un système quasi-monodisperse (en noir).

paroi.

Enfin, l’introduction d’un nombre inertiel généralisé, fondé sur l’introduction du diamètre moyen, permet de généraliser au cas des mélanges la loi de frottement mise en évidence antérieurement pour des systèmes quasi-monodisperses.

Cette étude ouvre plusieurs pistes de recherche. On voit la nécessité d’étudier en détail l’influence de la rugosité sur la loi de frottement. L’étude de la loi de comportement du mélange pourrait être précisée au moyen de simulations en cisaillement homogène, où l’on peut espérer éviter la ségrégation. Il serait aussi intéressant d’étudier d’autres polydispersités (mélange à trois taille, ou distribution continue).

## Références

1. R. A. Bagnold. *The physics of blown sand and desert dunes*. Chapman and Hall, London, 1941.
2. D. Brunsten and B. Prior, D., editors. *Slope instability*. John Wiley and Sons, 1984.
3. S. B. Savage. Flow of granular materials. In M. Piau and D. Caillerie, editors, *Theoretical and applied mechanics*, pages 241–266, Amsterdam, 1989. North Holland.

4. A. Bouchet, M. Naaim, F. Ousset, H. Bellot, and D. Cauvard. Experimental determination of constitutive equations for dense and dry avalanches : presentation of the set-up and first results. *Surveys in Geophysics*, 24 :525–541, 2003.
5. G. Félix and N. Thomas. Relation between dry granular flow regimes and morphology of deposits : formation of levées in pyroclastic deposits. *Earth And Planetary Science Letters*, 221 :197–213, 2004.
6. R.L. Brown and J.C. Richards. *Principles of powder mechanics*. Pergamon Press, Oxford, 1970.
7. R.M. Nedderman. *Statics and kinematics of granular materials*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
8. K. Rietema. *The dynamics of fine powders*. Elsevier, New York, 1991.
9. F. Chevoir and J. N. Roux, editors. *Colloque physique et mécanique des matériaux granulaires*. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris, 2000.
10. Ph. Coussot. *Rheometry of pastes, suspensions and granular materials*. Wiley, New-York, 2005.
11. J. N. Roux and F. Chevoir. Comportement mécanique des matériaux granulaires et simulations numériques discrètes. *Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées*, 254 :109–138, 2005.
12. G. Combe and J-N. Roux. Quasi-static rheology and the origin of strain. *Comptes Rendus Physique*, 3 :131–140, 2002.
13. C. S. Campbell. Rapid granular flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 22 :57–92, 1990.
14. E. Azanza, F. Chevoir, and P. Moucheron. Experimental study of collisional granular flows down an inclined plane. *J. Fluid Mech.*, 400 :199–227, 1999.
15. O. Pouliquen and F. Chevoir. Dense flows of dry granular materials. *Comptes Rendus Physique*, 3 :163–175, 2002.
16. GDR MIDI. On dense granular flows. *Euro. Phys. J. E*, 14 :341–365, 2004.
17. F. da Cruz, S. Emam, M. Prochnow, J-N. Roux, and F. Chevoir. Rheophysics of dense granular flows : Discrete simulation of plane shear flows. *Phys. Rev. E*, 72 :021309, 2005.
18. F. Chevoir, E. Azanza, F. da Cruz, G. Koval Junior, M. Prochnow, P. Rognon, Ph. Coussot, P. Moucheron, J.N. Roux, and L. Tocquer. *Rhéologie des pâtes et des milieux granulaires*, chapter Ecoulements granulaires : physique et applications. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées - Collection Etudes et Recherches des Laboratoires des Ponts et Chaussées, Paris, 2006.
19. F. de Larrard. *Structure granulaire et formulation des bétons*. Etudes et Recherches des Laboratoires des Ponts et Chaussées (OA34), Paris, 2000.
20. S. B. Savage and C.K.K. Lun. Particle size segregation in inclined chute flow of dry cohesionless granular solids. *J. Fluid Mech.*, 189 :311–335, 1988.
21. D. Hirshfeld and D.C. Rapaport. Molecular dynamics studies of grain segregation in sheared flow. *Physical Review E*, 56(2) :2012–2018, 1997.
22. A. V. Ottino and D. V. Khakhar. Mixing and segregation of granular materials. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 32 :55–91, 2000.

23. G. Berton, R. Delannay, P. Richard, N. Taberlet, and A. Valance. Two-dimensional inclined chute flows : Transverse motion and segregation. *Physical Review E*, 68 :051303, 2003.
24. M. Alam and S. Luding. Rheology of bidisperse granular mixtures via event driven simulations. *J. Fluid Mech.*, 476 :69–103, 2003.
25. S.R. Dahl, R. Clelland, and C.M. Hrenya. Three-dimensional, rapid shear flows of particles with continuous size distribution. *Powder Tech.*, 138 :7–12, 2003.
26. J. M. Montanero, V. Garzo, M. Alam, and S. Luding. Rheology of two and three-dimensional granular mixtures under uniform shear flow : Enskog kinetic theory versus molecular dynamics simulations. *Granular Matter*, 8 :103–115, 2006.
27. C. Goujon, N. Thomas, and B. Dalloz-Dubrujeaud. Monodisperse dry grain flows on inclined planes : role of roughness. *Euro. Phys. J. E*, 11 :147–157, 2003.
28. S. B. Savage and K. Hutter. The motion of a finite mass of granular material down a rough inclined. *J. Fluid Mech.*, 199 :177, 1989.
29. M. Naaim, S. Vial, and R. Couture. Saint Venant approach for rock avalanches modelling in multiple scale analysis and coupled physical systems. In *Saint Venant Symposium*, Paris, 1997. Presse de l’Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
30. S. Douady, B. Andreotti, and A. Daerr. On granular surface flow equations. *Euro. Phys. J.*, 11 :131–142, 1999.
31. P. Heinrich and Y. Grillon. Modélisation numérique des écoulements granulaires. Application aux avalanches de débris. In F. Chevoir and J.N. Roux, editors, *Colloque physique et mécanique des matériaux granulaires*, volume 2, page 407, Paris, 2000. LCPC.
32. O. Pouliquen and Y. Forterre. Friction law for dense granular flow : application to the motion of a mass down a rough inclined plane. *J. Fluid Mech.*, 453 :133–151, 2002.
33. A. Mangeney-Castelnau, F. Bouchut, J-P. Vilotte, E. Lajeunesse, A. Aubertin, and M. Pirulli. On the use of Saint Venant equations to simulate the spreading of a granular mass. *J. Geophys. Res.*, 110 :B09103, 2005.
34. F. da Cruz, M. Prochnow, E. Azanza, A. Ragouilliaux, L. Tocquer, P. Moucheron, J-N. Roux, Ph. Coussot, and F. Chevoir. Ecoulements denses de grains secs sur plan incliné. In *Actes des Journées Sciences de l’Ingénieur du LCPC*, pages 541–546, Paris, 2003.
35. F. da Cruz. *Ecoulements de grains secs : Frottement et blocage*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2004. <http://pastel.paristech.org/archive/00000946>.
36. P. Jop, Y. Forterre, and O. Pouliquen. Crucial role of sidewalls in granular surface flows : consequences for the rheology. *J. Fluid Mech.*, 541 :167–192, 2005.
37. O. Pouliquen. Scaling laws in granular flows down a rough inclined plane. *Phys. Fluids*, 11 :542–548, 1999.