Écoulements granulaires bidisperses sur plan incliné

Pierre Rognon[1,2,*], François Chevoir[1], Jean-Noël Roux[1] & Mohammed Naïm[2]

[1] *Laboratoire des Matériaux et des Structures du Génie Civil, Institut Navier, Cité Descartes*
2 allée Kepler, 77420 Champs-sur-Marne
[2] *CEMAGREF, 2 rue de la Papeterie, BP 76, 38402 Saint-Martin d'Hères, France*
$*$ *rognon@crpp-bordeaux.cnrs.fr*

Résumé :

Nous présentons ici une étude par simulation numérique discrète de l'écoulement dense d'un mélange bidisperse de disques sur un plan incliné rugueux, restreinte aux écoulements stationnaires et uniformes, dans lesquels une ségrégation par taille s'est établie. On a alors une stratification du matériau avec une couche de petits grains près du socle, une couche superficielle de gros grains et une couche intermédiaire mélangeant les deux espèces. De la mesure des profils de vitesse, de contraintes et de compacité, nous déduisons une loi de frottement locale pour la rhéologie d'un tel mélange, avec une dépendance approximativement linéaire du coefficient de frottement effectif en fonction d'un certain nombre inertiel*, nombre sans dimension qui généralise la grandeur introduite pour la rhéologie des systèmes quasi-monodisperses, à condition de prendre en compte le diamètre moyen des grains (pondéré par la masse).*

Abstract :

We report on a discrete element simulation study of steady uniform flows of bidisperse assemblies of disks down rough inclines in which a segregation by size is established: the material comprises a layer of small grains near the substrate, a superficial layer of large grains, and an intermediate one in which both species are present. From measurements of density, velocity and stress profiles we indentify a local friction law expressing the rhelogy of the mixture. The internal friction coefficient varies linearly with a suitable generalization of the inertial number *defined in monodisperse systems, involving the mass-averaged grain diameter.*

Mots-clefs : écoulements granulaires ; ségrégation ; frottement interne

1 Introduction

Motivée par des application géophysiques et industrielles, la recherche sur les écoulements granulaires denses enregistré de récents progrès (Pouliquen & Chevoir 2002; GDR MIDI 2004; da Cruz *et al.* 2005; Chevoir *et al.* 2006), grâce aux apports combinés d'expériences sur matériaux modèles et de simulations numériques discrètes à l'échelle des grains. L'étude de géométries d'écoulement simples a permis d'identifier et de mesurer des caractéristiques robustes et reproductibles et d'isoler les influences déterminantes. Ainsi, pour des grains rigides quasi-monodisperses de diamètre moyen d et masse volumique ρ_p soumis à une pression P et à un taux de cisaillement $\dot{\gamma}$, ces études ont mis en évidence le rôle du paramètre sans dimension appelé *nombre inertiel*, noté I, qui intervient dans une *loi de frottement* exprimant le comportement du matériau sous la forme :

$$\mu^* \approx \mu_0 + bI, \quad (\text{pour } 0 \leq I = \dot{\gamma} d\sqrt{\tfrac{\rho_p}{P}} \leq 0{,}3) \tag{1}$$

où le coefficient de frottement interne (ou l'angle ϕ, avec $\mu_0 = \tan\phi \simeq \phi$), ainsi que b, sont des paramètres liés aux propriétés micromécaniques des grains.

Cependant, dans les applications (notamment au génie civil), la granulométrie, plus étendue, conduit à une ségrégation des plus gros grains à la surface de l'écoulement (Ottino & Khakhar

2000; Félix & Thomas 2004), phénomène dont les conséquences rhéologiques demeurent mal comprises en régime inertiel dense (I de l'ordre de 0,1 ou moins).

Nous abordons ici ce problème par la simulation numérique discrète, dans la situation simple d'un mélange bi-disperse de disques s'écoulant sur un plan incliné rugueux. Le phénomène de ségrégation en lui-même n'est pas l'objet de notre étude, qui porte sur les propriétés de l'écoulement une fois qu'un état stationnaire ségrégé est obtenu. Nous commençons par décrire le système simulé (§ 2), puis discutons les caractéristiques des écoulements permanents et uniformes (§ 3). Nous mesurons alors la loi de frottement globale de la couche en écoulement (§ 4). Nous proposons enfin une généralisation de la loi de frottement locale au cas des mélanges (§ 5).

2 Système simulé

Bidimensionnel, le matériau modèle est une collection bi-disperse de 500 à 1000 disques de même masse « volumique » (2D) ρ_p : n_1 petits disques de diamètre moyen d_1 et n_2 grands disques de diamètre moyen d_2 (avec une petite polydispersité ($\pm 20\%$) autour de chaque diamètre moyen). Ce mélange est caractérisé par le rapport de taille $D = d_2/d_1$ et par la proportion surfacique de gros grains $S = (n_2 {d_2}^2)/(n_2 {d_2}^2 + n_1 {d_1}^2)$. Nous avons étudié les mélanges suivants : $D = \{2; 3; 4; 6; 8\}$ et $S = \{1/4; 1/2; 3/4\}$.

Les écoulements sont simulés par dynamique moléculaire (Roux & Chevoir 2005). Tous les grains ont les mêmes propriétés de contact, avec un coefficient de frottement fixé à 0.4, une certaine dissipation dans les chocs et une raideur normale assez grande pour que les effets géométriques de la déflexion des contacts ($< 10^{-3} d$) restent négligeables (limite des grains rigides). Le temps de collision binaire restera très petit devant le temps caractéristique $\sqrt{d_1/g}$ lié à la gravité. Les unités de longueur, de temps et de vitesse utilisées sont d_1, $\sqrt{d_1/g}$, et $\sqrt{g d_1}$.

On note H l'épaisseur de la couche s'écoulant sur un plan incliné rugueux incliné de θ par rapport à l'horizontale sous l'effet de la gravité g. Les conditions aux limites sont périodiques dans la direction x de l'écoulement. La rugosité est composée de petits grains fixes, alignés et jointifs qui ont les mêmes propriétés mécaniques que les grains en écoulement. Nous avons étudié les situations suivantes : $12^o \leqslant \theta \leqslant 30^o$ et $10 \leqslant H/d_1 \leqslant 50$.

3 Écoulements permanents et uniformes

Les mélanges bidisperses s'écoulent de manière permanente (qui ne dépend pas du temps) et uniforme (qui ne dépend pas de la coordonnée x le long de l'écoulement) dans une certaine gamme d'inclinaison et d'épaisseur qui varie avec la composition du mélange. Dans de tels écoulements, les profils selon y des contraintes, de vitesse ou de fraction solide peuvent être moyennés dans le temps et dans la direction x. On observe alors toujours $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$, tandis que, notant $P = \sigma_{yy}$ et $\Sigma = \sigma_{xy}$ vérifient (la compacité ν étant approximativement constante) :

$$P(y) = \rho_p \nu g \cos\theta (H - y) \ \text{ et } \ \Sigma(y) = \rho_p \nu g \sin\theta (H - y). \tag{2}$$

L'état final stationnaire se caractérise aussi par une ségragation en taille, et il est indépendant du mode de préparation, dépôt gravitaire ou inclusion de gros grains à la place des petits. Pour chaque écoulement, la fraction solide totale ou compacité $\nu(y)$ est approximativement constante et proche de 0,8, mais les gros grains se trouvent préférentiellement en haut de l'écoulement. Les écoulements bidisperses se structurent en trois couches : une couche de petits grains au fond, une couche de gros grains à la surface, une couche mixte au centre. L'épaisseur de la couche supérieure de gros grains croît avec S, et pour $S = 3/4$ la couche basale de petits grains disparaît. À partir des compacités partielles ν_1 et ν_2 des petits et gros grains ($\nu = \nu_1 + \nu_2$), nous définissons un nombre sans dimension $\mathcal{D}$ qui exprime le diamètre moyen des grains en masse :

$$\mathcal{D} = \frac{\nu_1 + \nu_2 D}{\nu}, \tag{3}$$

dont nous traçons le profil sur la Fig. 1 pour différents mélanges. La figure 1 montre aussi les

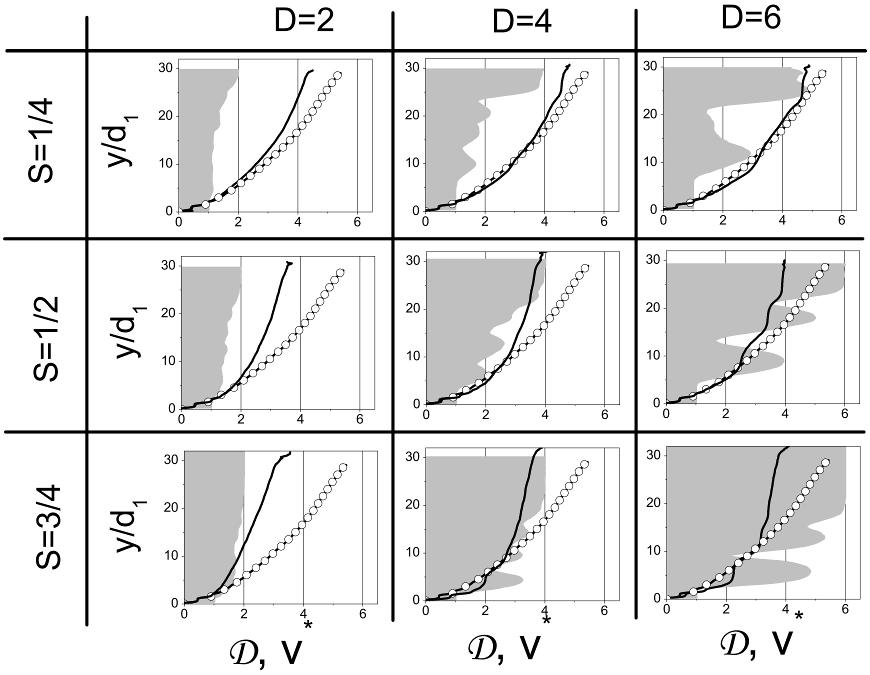

FIG. 1 – Profils de vitesse adimensionnée ($\theta = 17^o, H \approx 30d_1$) : mélange bidisperse (—) et quasi-monodisperse (○) ; Profils de diamètre moyen adimensionné (gris).

profils de vitesse adimensionnée $v^* = v_x/\sqrt{gd_1}$ pour différents mélanges. Pour l'écoulement monodisperse, le profil de vitesse donne $\dot{\gamma} \propto \sqrt{H-y}/d$ (Chevoir *et al.* 2006). Pour un écoulement bidisperse, le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ diminue systématiquement dans la couche supérieure (ce qui est logique car d est au dénominateur de $\dot{\gamma}$). Si les gros grains sont assez nombreux ($S \gtrsim 3/4$) et assez gros ($D \gtrsim 3$), le cisaillement augmente fortement près de la paroi.

4 Loi de frottement macroscopique

Les méthodes de type Saint-Venant (Savage & Hutter 1989; Naaim *et al.* 1997; Pouliquen & Forterre 2002; Mangeney-Castelnau *et al.* 2005) couramment utilisées pour simuler des écoulements dans des géométries complexes nécessitent une donnée cruciale : l'expression du coefficient de frottement μ_p^* entre l'écoulement et la paroi, défini comme le rapport des contraintes tangentielle S_p et normale P_p à la paroi.

Pour des grains monodisperses (diamètre d, masse volumique ρ_p) en écoulement sur un plan incliné rugueux, il a été montré que cette loi de frottement dépend à la fois de l'épaisseur H et d'une vitesse caractéristique de l'écoulement (vitesse moyenne ou vitesse à la surface $v_x(H)$), (da Cruz *et al.* 2003; da Cruz 2004; Jop *et al.* 2005), et s'exprime de façon unique pour différentes épaisseurs :

$$\mu_p^* \simeq \phi + BI_g, \ \text{avec} \ I_g = \frac{v_x(H)}{H} d \sqrt{\frac{\rho_p}{P(0)}}. \tag{4}$$

ϕ est est ici l'angle de frottement interne, il dépend, comme B, du couple matériau-rugosité considéré. I_g est le *nombre inertiel global*. Peut-on écrire une loi de ce type les écoulement bidisperses ?

Pour le voir, une fois établi un régime d'écoulement stable, on modifie la pente θ assez lentement pour que l'écoulement puisse être considéré comme permanent à chaque instant. La pente θ reste dans l'intervalle $\phi < \theta < \theta_{max}$. Pour $\theta < \phi$ l'écoulement s'arrête, et pour $\theta > \theta_{max}$ l'écoulement est accéléré. La mesure de l'épaisseur H et de la vitesse à la surface $v_x(H)$ en fonction de $\theta \simeq \mu_p^*$ donne accès à la loi de frottement du mélange. Il apparaît que pour un mélange donné, dès que l'épaisseur est suffisamment grande ($H/d_1 \geq 10$), on peut écrire la loi de frottement d'une façon similaire à celle d'un écoulement monodisperse selon (4), relation dans laquelle il faut remplacer d par d_1, la pente B n'est pas modifiée, mais l'angle d'arrêt $\phi(S, D)$ varie alors comme représenté sur la figure 2. Pour des gros grains assez petits ($D \lesssim 3$), plus la proportion de gros grains augmente, plus le frottement augmente. Pour des gros grains plus gros ($D \gtrsim 3$), le frottement augmente aussi lorsque la proportion passe de 1/4 à 1/2, mais diminue lorsqu'elle passe de 1/2 à 3/4. Il apparaît donc deux effets antagonistes : l'augmentation du frottement lorsque les gros grains n'occupent que la couche supérieure de l'écoulement (diminution du taux de cisaillement), d'une part ; la diminution du frottement lorsque les gros grains interagissent avec la paroi et qu'ils sont assez gros pour favoriser le glissement, d'autre part. Dans ce dernier cas, plus les gros grains sont gros, plus le glissement est favorisé.

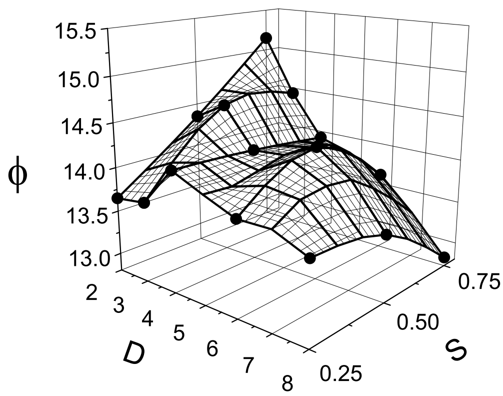

FIG. 2 – Angle de frottement interne ϕ en fonction du mélange.

5 Loi de frottement locale

Nous cherchons maintenant à analyser la loi de frottement locale, y compris dans la couche de mélange. Pour cela, nous faisons l'hypothèse que la grandeur essentielle qui varie au sein du mélange est le diamètre moyen des grains $\mathcal{D}d_1$. Nous définissons alors un nombre inertiel généralisé $I_\mathcal{D}$ à l'aide de ce diamètre moyen des grains :

$$I_\mathcal{D} = \dot{\gamma}\mathcal{D}d_1\sqrt{\frac{\rho_p}{P}}. \tag{5}$$

dont nous traçons le profil sur la Fig. 3 pour divers mélanges. Nous constatons qu'en dehors des fortes oscillations pour les systèmes constitués d'un petit nombre de couches de gros grains, $I_\mathcal{D}$ est à peu près constant dans l'épaisseur de la couche, et voisin de la valeur pour un système monodisperse. Ceci en fait un bon candidat pour l'écriture d'une loi de frottement locale.

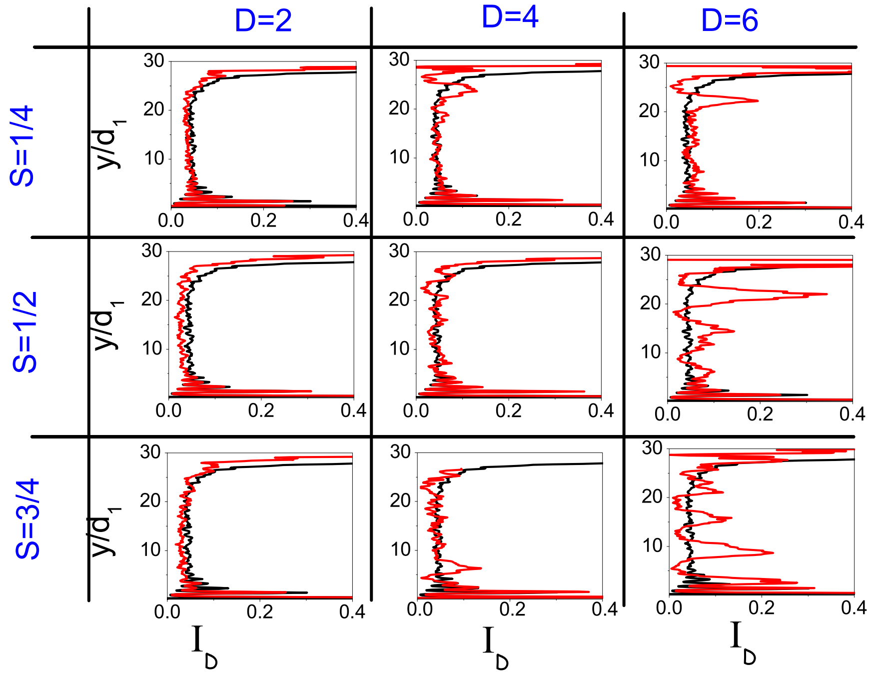

FIG. 3 – Profil du nombre inertiel généralisé $I_{\mathcal{D}}$ pour divers mélanges (en rouge), en comparaison d'un système quasi-monodisperse (en noir).

Revenant alors au tracé de la loi de frottement, c'est à dire la relation entre l'inclinaison et le nombre inertiel généralisé, nous voyons sur la Fig. 4 qu'il apparaît assez clairement une loi de frottement locale pour ces mélanges, en bon accord quantitatif avec les mélanges monodisperses tant que la proportion de gros grains et le rapport de taille n'est pas trop grand :

$$\mu^* \simeq \phi + bI_{\mathcal{D}}. \qquad (6)$$

L'accord reste qualitativement bon pour les autres mélanges mais les paramètres ϕ et b sont affectés. La réduction du coefficient de frottement effectif pour un nombre inertiel généralisé $I_{\mathcal{D}}$ donné, qui apparaît lorsque D ou S augmentent, pourrait s'interpréter par une action lubrifiante des petits grains qui s'interposent entre les gros grains.

6 Conclusion

Les simulations numériques discrètes d'écoulements bidisperses sur plan incliné rugueux ont mis en évidence une phénoménologie assez riche. Le mélange se ségrège et forme trois couches : une couche de petits grains en bas, une couche de gros grains en haut et une couche mixte au centre. Les mesures identifient une loi de frottement macroscopique pour la couche en écoulement et soulignent l'importance de la rhéologie particulière de la zone mixte et de l'apparition d'un glissement à la paroi. Enfin, l'introduction d'un nombre inertiel fondé sur le diamètre moyen local permet de généraliser au cas des mélanges la loi de frottement des systèmes quasi-monodisperses.

Cette étude appelle plusieurs prolongements, pour traiter de l'influence de la rugosité sur la loi de frottement, de cas de cisaillements homogènes (y a-t-il ségrégation ?), d'autres polydispersités (mélange à trois tailles, ou distribution continue) et de systèmes tridimensionnels.

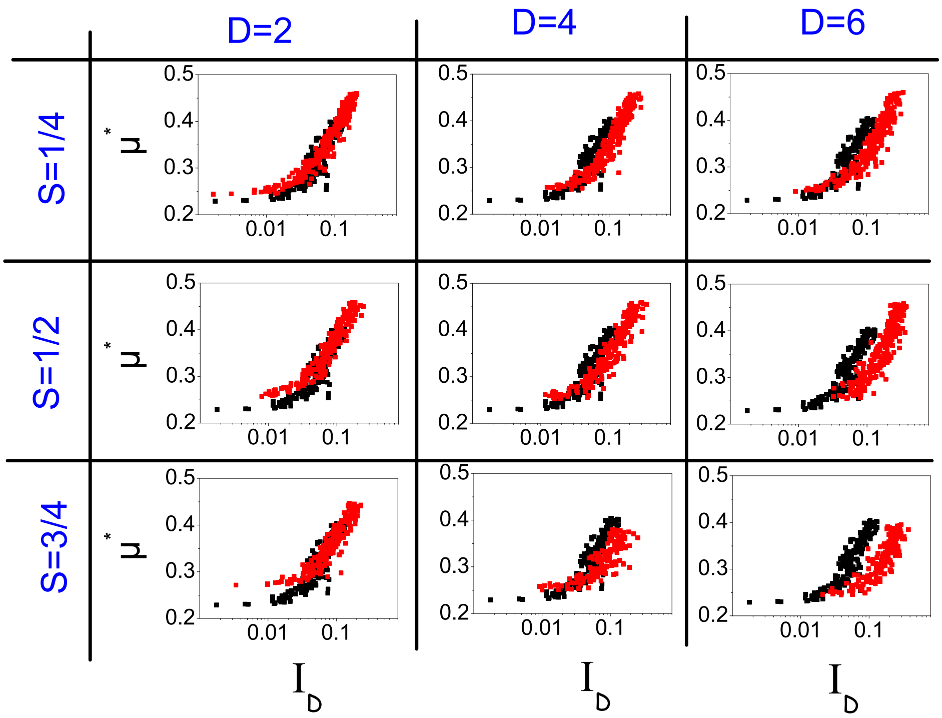

FIG. 4 – Loi de frottement locale $\mu^*(I_D)$ pour divers mélanges (en rouge), en comparaison d'un système quasi-monodisperse (en noir).

Références

Chevoir, F., Azanza, E., da Cruz, F., Koval Junior, G., Prochnow, M., Rognon, P., Coussot, P., Moucheront, P., Roux, J., & Tocquer, L. 2006. *Rhéologie des pâtes et des milieux granulaires* : Chapter Ecoulements granulaires : physique et applications. Paris : Laboratoire Central des Ponts et Chaussées - Collection Etudes et Recherches des Laboratoires des Ponts et Chaussées.

da Cruz, F. 2004. *Ecoulements de grains secs : Frottement et blocage*. Ph. D. thesis : Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. http ://pastel.paristech.org/archive/00000946.

da Cruz, F., Emam, S., Prochnow, M., Roux, J.-N., & Chevoir, F. 2005. Rheophysics of dense granular flows : Discrete simulation of plane shear flows. *Phys. Rev. E* 72 : 021309.

da Cruz, F., Prochnow, M., Azanza, E., Ragouilliaux, A., Tocquer, L., Moucheront, P., Roux, J.-N., Coussot, P., & Chevoir, F. 2003. Ecoulements denses de grains secs sur plan incliné. In *Actes des Journées Sciences de l'Ingénieur du LCPC* : Paris : 541–546.

Félix, G. & Thomas, N. 2004. Relation between dry granular flow regimes and morphology of deposits : formation of levées in pyroclastic deposits. *Earth And Planetary Science Letters* 221 : 197–213.

GDR MIDI 2004. On dense granular flows. *Euro. Phys. J. E* 14 : 341–365.

Jop, P., Forterre, Y., & Pouliquen, O. 2005. Crucial role of sidewalls in granular surface flows : consequences for the rheology. *J. Fluid Mech.* 541 : 167–192.

Mangeney-Castelnau, A., Bouchut, F., Vilotte, J.-P., Lajeunesse, E., Aubertin, A., & Pirulli, M. 2005. On the use of Saint Venant equations to simulate the spreading of a granular mass. *J. Geophys. Res.* 110 : B09103.

Naaim, M., Vial, S., & Couture, R. 1997. Saint Venant approach for rock avalanches modelling in multiple scale analysis and coupled physical systems. In *Saint Venant Symposium* : Paris. Presse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

Ottino, A. V. & Khakhar, D. V. 2000. Mixing and segregation of granular materials. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 32 : 55–91.

Pouliquen, O. & Chevoir, F. 2002. Dense flows of dry granular materials. *Comptes Rendus Physique* 3 : 163–175.

Pouliquen, O. & Forterre, Y. 2002. Friction law for dense granular flow : application to the motion of a mass down a rough inclined plane. *J. Fluid Mech.* 453 : 133–151.

Roux, J. N. & Chevoir, F. 2005. Simulations numériques discrètes et comportement mécanique des matériaux granulaires. *Bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées* 254 : 109–138.

Savage, S. B. & Hutter, K. 1989. The motion of a finite mass of granular material down a rough inclined. *J. Fluid Mech.* 199 : 177.